Metazbiory

Zbiory z częściowym należeniem

Bartłomiej Starosta
barstar@ipipan.waw.pl

Motto

O percepcji

As it was noticed by Adolf Lindenbaum and Alfred Tarski,
if we glue together all the sentences which represent the same thought
in a deductively closed theory in classical logic,
we get a Boolean algebra.
Intuitively, this is an algebra of thoughts for the theory.
Algebraic operators in the algebra of thoughts
correspond to logical connectives[1].

[1] Andrzej Jankowski, Andrzej Skowron, *Logic for Artificial Intelligence: A Rasiowa–Pawlak School Perspective*, in: Andrzej Mostowski and Foundational Studies, IOS Press, 2008.

Metazbiory – zbiory z wielowartościową relacją należenia

W skrócie

- W klasycznej teorii mnogości (ZFC) relacja $\in$ jest dwuwartościowa.
- Jak sformalizować wielowartościowe należenie?
- Popularne podejścia: zbiory rozmyte, zbiory przybliżone.
- Ich semantyka jest inna niż należenie elementu do zbioru opisywane przez ZFC (stopniowanie, niepełność informacji).

A gdyby tak rozszerzyć $\in$ do funkcji o wartościach w algebrze Boole'a ?

- Boolowskie modele [Rasiowa & Sikorski] i forcing [Scott & Solovay]
- Koncepcja metazbioru nakierowana jest na zastosowania komputerowe.
- Umożliwia wyrażanie częściowego należenia, równości, a nawet częściowej prawdziwości złożonych zdań.

Inne podejścia do zbiorów z częściowym należeniem

- The notion of “belonging”, which plays a fundamental role in the case of ordinary sets, does not have the same role in the case of fuzzy sets. Thus, it is not meaningful to speak of a point x “belonging” to a fuzzy set A except in the trivial sense of $f_A(x)$ [2] being positive. *L. Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, 1965*.
- Rough set theory is a new mathematical approach to imperfect knowledge. *Z. Pawlak, Transactions on Rough Sets I, Springer, 2004*.
- Boolean-valued sets, and not fuzzy sets, are the vague sets we have been looking for as the denotations of vague predicates. *K. Akiba, Boolean-valued sets as vague sets, Vague objects and vague identity, Springer 2014.*

[2] $f_A(x)$ jest funkcją przynależności zbioru rozmytego A.

Inspiracje

Forcing – metoda dowodzenia niezależności tez w klasycznej teorii mnogości

- Twórca forcingu – Paul Cohen – otrzymał za nią Medal Fieldsa w 1966 r.
- Pierwsze zastosowanie – niezależność hipotezy continuum: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

Paul Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1963.

Forcing boolowski

- Algebraizacja logiki: Rasiowa & Sikorski,
  The mathematics of metamathematics, 1963.
- W 1967 Scott i Solovay wykorzystują metody algebraiczne w forcingu.
- Powstaje pomysł rozszerzenia binarnej relacji $\in$ dla zbiorów do funkcji wartościowanej w nietrywialnej algebrze Boole'a.

- Podstawowe definicje dotyczące metazbiorów są wzięte z forcingu.
- Zastosowane w skończonym świecie, w innym celu niż pierwotny zamysł (którym było tworzenie specyficznych modeli dla ZF), dają inne rezultaty.

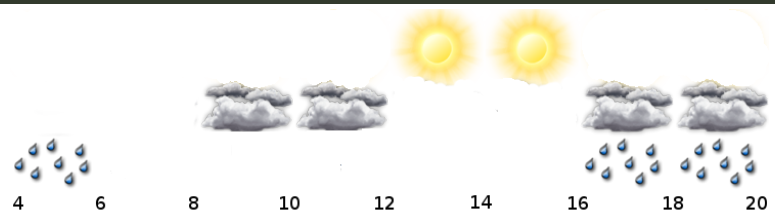
Reprezentacja nieprecyzyjnych danych

Jaka pogoda była wczoraj?

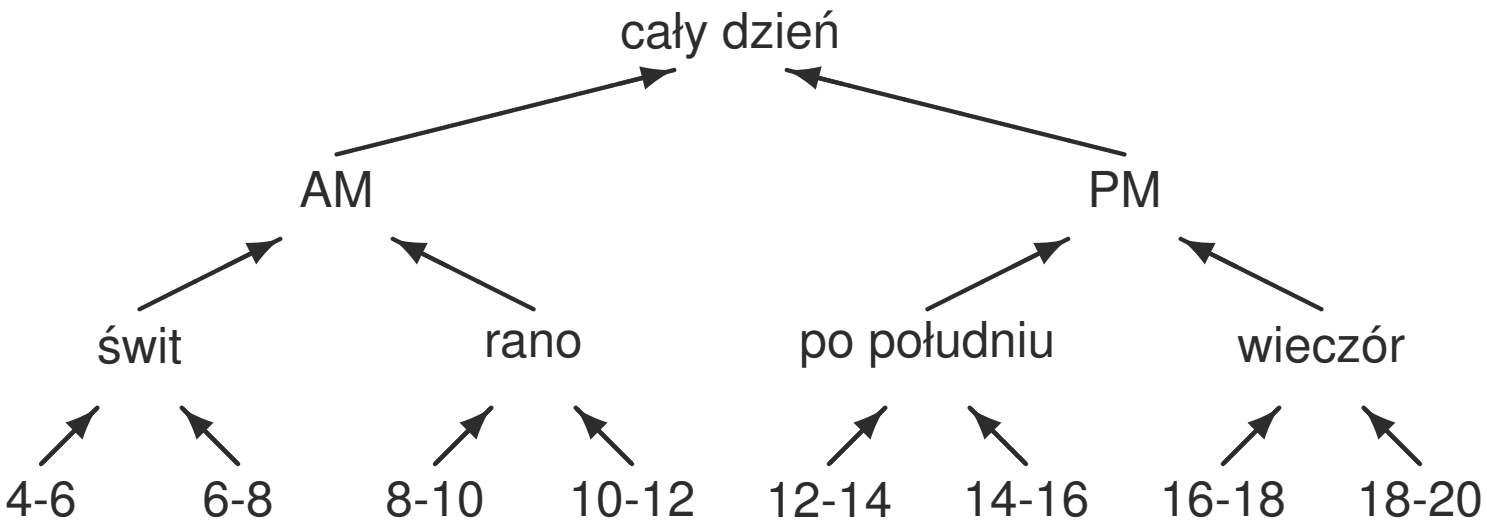
Wczoraj pogoda była jednocześnie ładna, brzydka i nijaka

* deszcz między 4 a 6 rano,
* deszczowo wieczorem,
* słonecznie po południu,
* pochmurno rano i wieczorem.

Wizualizacja



Hierarchia przedziałów czasowych do reprezentacji pór dnia



Reprezentacja nieprecyzyjnych danych

Modelowanie relacji: przykłady częściowego należenia

Opis / oznaczenia

Δ: wszystkie 2 dni urlopu

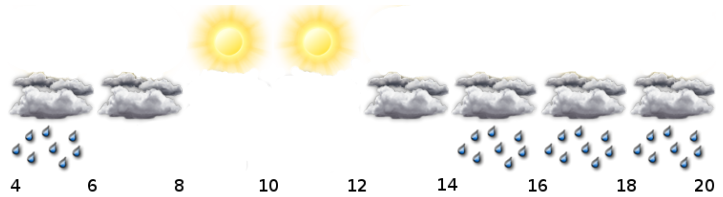
Ψ: dni słoneczne

Γ: dni pochmurne

Θ: dni deszczowe

δ_1 :

δ_2 :



Mamy dwa pełne dni urlopu: $\delta_1\ \epsilon_{\text{cały dzień}}\ \Delta \wedge \delta_2\ \epsilon_{\text{cały dzień}}\ \Delta$.

$\delta_1\ \epsilon_{\text{po południu}}\ \Psi \wedge \delta_2\ \epsilon_{\text{rano}}\ \Psi$,

$\delta_1\ \epsilon_{4\text{-}6}\ \Theta \wedge \delta_1\ \epsilon_{\text{wieczór}}\ \Theta$,

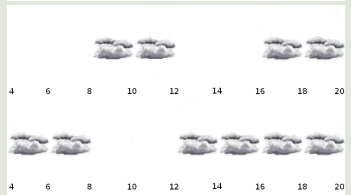
$\delta_2\ \epsilon_{4\text{-}6}\ \Theta \wedge \delta_2\ \epsilon_{14\text{-}16}\ \Theta \wedge \delta_2\ \epsilon_{\text{wieczór}}\ \Theta$

$\delta_1\ \epsilon_{\text{rano}}\ \Gamma \wedge \delta_1\ \epsilon_{\text{wieczór}}\ \Gamma$,

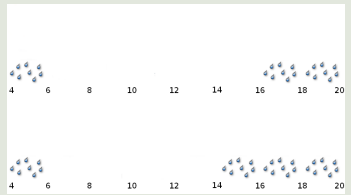
$\delta_2\ \epsilon_{\text{świt}}\ \Gamma \wedge \delta_1\ \epsilon_{PM}\ \Gamma$.

Ψ :

Γ :



Θ :



Reprezentacja nieprecyzyjnych danych

Relacje mnogościowe: częściowa równość i różność

Opis / oznaczenia

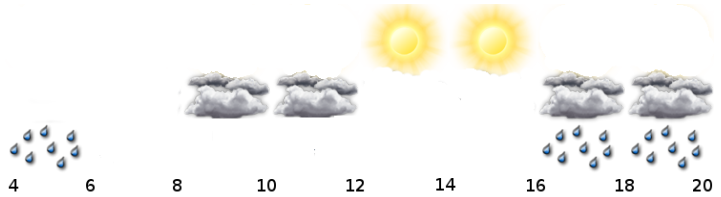
Δ: wszystkie 2 dni urlopu

Ψ: dni słoneczne

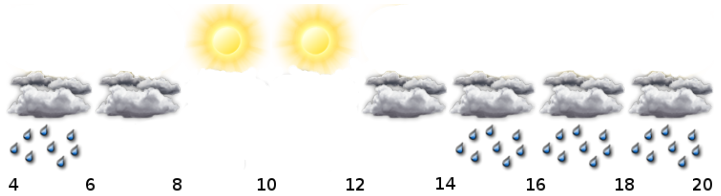
Γ: dni pochmurne

Θ: dni deszczowe

δ_1 :



δ_2 :



Warunkowa równość (różność) –
kiedy dwa zjawiska
występują równocześnie (wykluczają się):

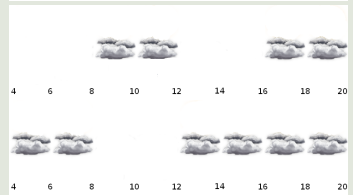
$\Theta \approx_{wieczór} \Gamma \quad \wedge \quad \Theta \approx_{14\text{-}16} \Gamma$

$\Psi \approx_{6\text{-}8} \Theta$ *wtedy oba są* $= \varnothing$

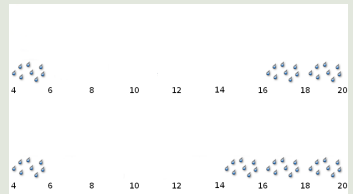
$\Psi \not\approx_{cały\ dzień} \Gamma$ *słońce i chmury się wykluczają*

Ψ :

Γ :



Θ :



Przetwarzanie nieprecyzyjnych danych

Operacje algebraiczne

Opis / oznaczenia

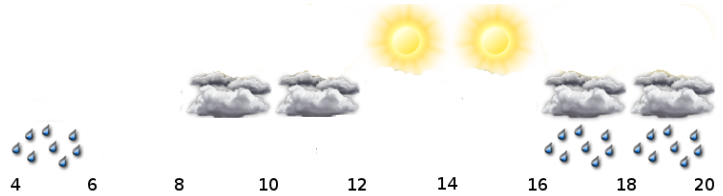
Δ: wszystkie 2 dni urlopu

Ψ: dni słoneczne

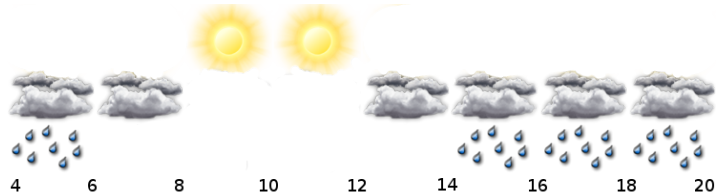
Γ: dni pochmurne

Θ: dni deszczowe

δ_1 :



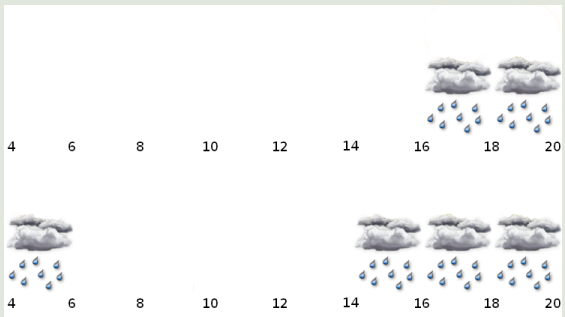
δ_2 :



część wspólna

$\Gamma \frown \Theta$

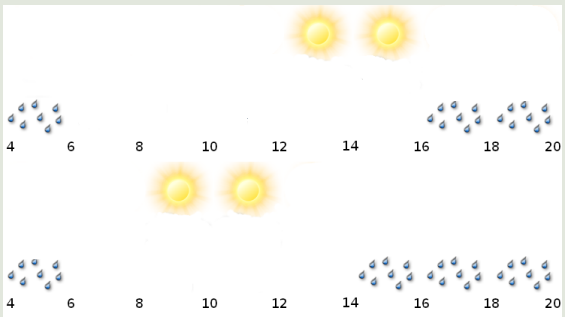
deszcz padał z chmur



suma

$\Psi \smile \Gamma$

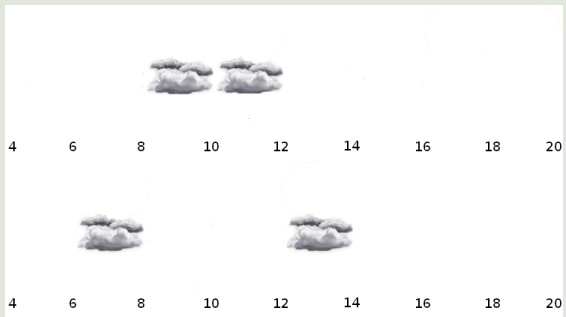
słońce lub deszcz



różnica

$\Gamma \leftthreetimes \Theta$

pochmurno bez deszczu



Przetwarzanie nieprecyzyjnych danych

Moc metazbioru: ile było dni słonecznych, deszczowych, pochmurnych ?

Opis / oznaczenia

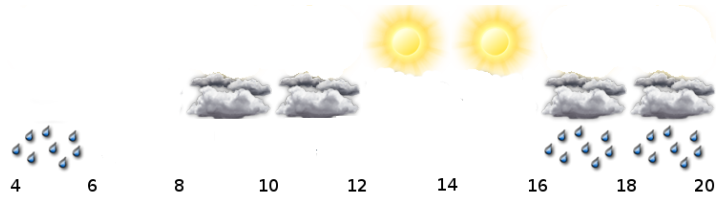
Δ: wszystkie 2 dni urlopu

Ψ: dni słoneczne

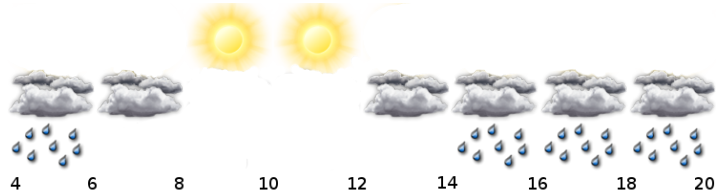
Γ: dni pochmurne

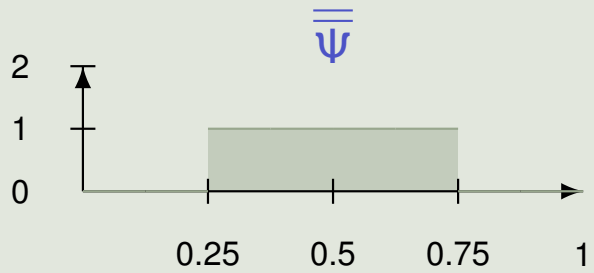
Θ: dni deszczowe

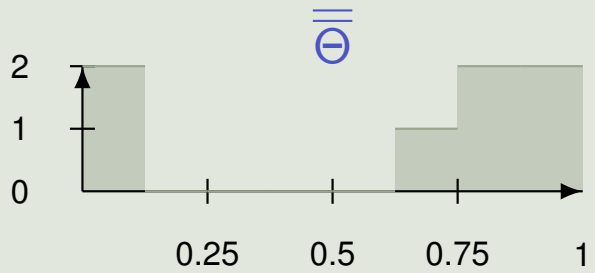
δ_1 :

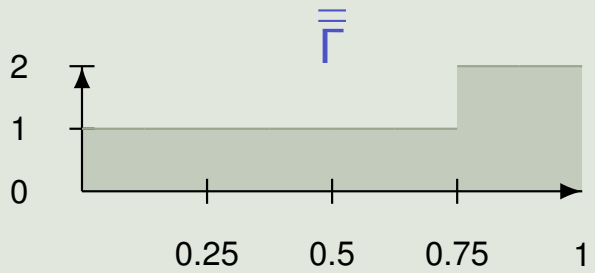


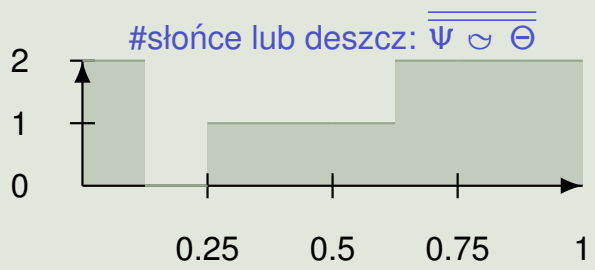
δ_2 :

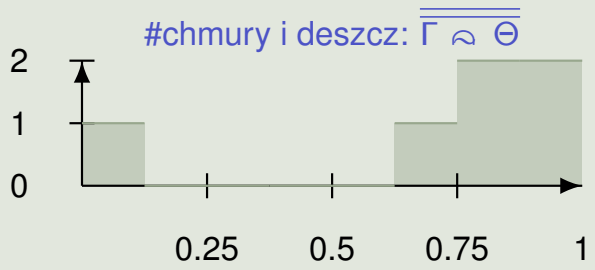












Przestrzeń ewaluacji

Drzewo binarne $\mathbb{T}$ i algebra Cantora $\mathbb{B}$

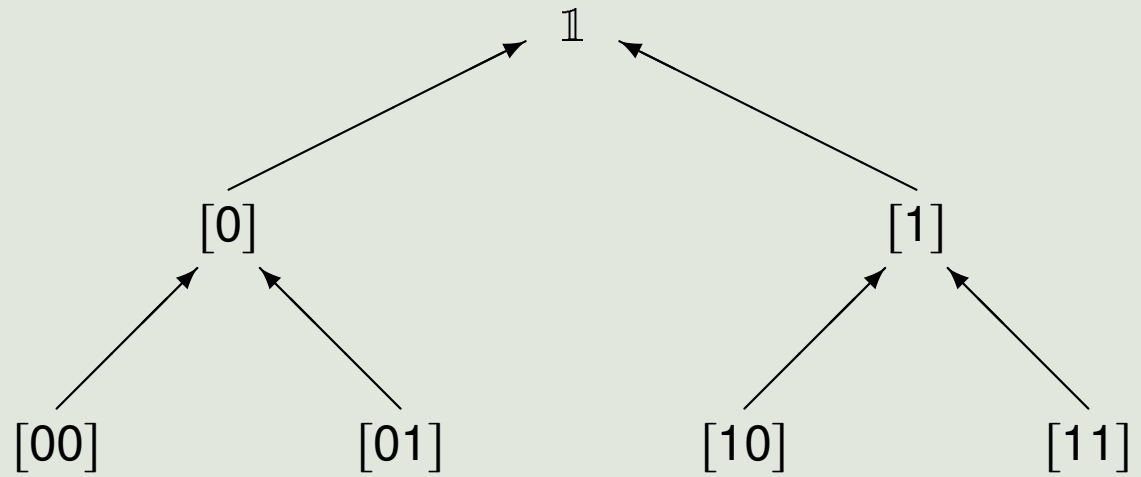


Figure: Częściowy porządek w nieskończonym drzewie binarnym $\mathbb{T}$ (poziomy $0-2$). Strzałki wskazują na większy element w porządku drzewa ($\mathbb{1}$ jest największy).

- Drzewo $\mathbb{T}$ składa się ze wszystkich skończonych ciągów binarnych.
- Gałąź to nieskończony ciąg binarny o początku w korzeniu $\mathbb{1}$.
- Dla $p \in \mathbb{T}$, przez $\bar{p}$ oznaczamy zbiór wszystkich gałęzi, których p jest prefiksem (przechodzących przez p).
- Zbiory $\bar{p}$ są elementami algebry Boole'a zwanej algebrą Cantora ($\mathbb{B}$).
- Składa się ona ze skończonych sum i przecięć zbiorów postaci $\bar{p}$.
- Operacje w $\mathbb{B}$ odpowiadają operacjom algebraicznym na zbiorach $\bar{p}$.

Definicja metazbioru

Częściowe należenie na pierwszym lub na wszystkich poziomach hierarchii

Definicja uproszczona (do zastosowań komputerowych)

Metazbiór pierwszego poziomu to zbiór postaci:

$$\tau = \{\, \langle \sigma, p \rangle : \sigma \text{ jest zbiorem, } p \in \mathbb{T} \,\}.$$

$\langle , \rangle$ oznacza parę uporządkowaną.

W klasycznej teorii mnogości elementami zbiorów są inne zbiory.
Podobnej cechy oczekujemy od metazbiorów z częściowym należeniem.

Definicja ogólna (przez epsilon-indukcję)[3]

Metazbiór to zbiór pusty $\varnothing$ albo zbiór postaci:

$$\tau = \{\, \langle \sigma, p \rangle : \sigma \text{ jest metazbiorem, } p \in \mathbb{T} \,\}.$$

[3] To jest definicja *P*-nazwy z forcingu, uzasadnienie np. w rozdz. VII, §2, Kenneth Kunen, *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland Publishing Company, 1980

Metazbiór jako rodzina klasycznych zbiorów

Z danego metazbioru możemy przy pomocy gałęzi[4] wyprodukować klasyczny zbiór nazywany jego interpretacją.

Definicja uproszczona

Interpretacją metazbioru pierwszego poziomu τ, zadaną przez gałąź $\mathcal{C}$ w $\mathbb{T}$ nazywamy zbiór:

$$\tau_{\mathcal{C}} = \{\, \sigma : \langle \sigma, p \rangle \in \tau \wedge p \in \mathcal{C} \,\}.$$

- Interpretacja $\tau_{\mathcal{C}}$ powstaje przez usunięcie z τ wszystkich par, w których p nie leży na gałęzi $\mathcal{C}$,
- a następnie zastąpienie pozostałych par ich pierwszymi elementami.

Przykład: $\tau_{\mathcal{C}}$ zależy od $\mathcal{C}$

Niech $p \in \mathbb{T}$ i $\tau = \{\langle \varnothing, p \rangle\}$. Jeśli $\mathcal{C}$ jest gałęzią, to:

$$p \in \mathcal{C} \quad \rightarrow \quad \tau_{\mathcal{C}} = \{\varnothing\}\ ,$$
$$p \notin \mathcal{C} \quad \rightarrow \quad \tau_{\mathcal{C}} = \varnothing\ .$$

[4] Gałąź $\mathcal{C}$ w $\mathbb{T}$ to łańcuch maksymalny. Inaczej: funkcja $\mathbb{N} \mapsto \{0, 1\}$, nieskończony ciąg 0-1

Wymuszanie

Relacja wymuszania pozwala nadawać stopnie pewności zdaniom

- $\phi(x^1, \ldots x^n)$ – formuła w języku teorii mnogości (symbole relacji $\in$ i $=$)
- $x^1, \ldots x^n$ – zmienne wolne w ϕ
- $\nu^1, \ldots \nu^n$ – metazbiory

- Jeśli za zmienne wolne w $\phi(x^1, \ldots x^n)$ podstawimy metazbiory $\nu^1, \ldots \nu^n$, a zmienne związane ograniczymy do klasy metazbiorów, to otrzymamy zdanie $\Phi(\nu^1, \ldots \nu^n)$.
- Np. dla $\phi \equiv x \in y$ i podstawienia $x \leftarrow \sigma$, $y \leftarrow \tau$, otrzymujemy $\Phi \equiv \sigma \in \tau$.
- Abstrahując od sensu teoriomnogościowego zdania $\Phi(\nu^1, \ldots \nu^n)$ (jaki ma sens $\sigma \in \tau$?), nadamy mu wartość pewności w algebrze $\mathbb{B}$.
- Dla danej gałęzi $\mathcal{C}$, zdanie $\Phi(\nu^1_{\mathcal{C}}, \ldots \nu^n_{\mathcal{C}})$ może być prawdziwe lub fałszywe, np., $\sigma_{\mathcal{C}} \in \tau_{\mathcal{C}}$ mówi, że zbiór $\sigma_{\mathcal{C}}$ należy do zbioru $\tau_{\mathcal{C}}$.

Definicja wymuszania

Warunek $p \in \mathbb{T}$ *wymusza* zdanie $\Phi(\nu^1, \ldots \nu^n)$ (ozn. $p \Vdash \Phi$), gdy dla każdej gałęzi $\mathcal{C}$ zawierającej p, zdanie $\Phi(\nu^1_{\mathcal{C}}, \ldots \nu^n_{\mathcal{C}})$ jest prawdziwe.

Wartościowanie zdań

Niech Φ oznacza zdanie atomowe bądź jego negację

Definicja: wartościowanie podzbiorami $\mathbb{T}$

Stopniem pewności dla Φ nazywamy zbiór

$$\|\Phi\| = \max\{\, p \in \mathbb{T} \colon p \Vdash \Phi \,\} .$$

Ewaluacja w algebrze Cantora

$$|||\Phi||| \quad = \bigvee_{p \in \|\Phi\|} \bar{p} \, .$$

$\bar{p} \in \mathbb{B}$ *jest zbiorem wszystkich gałęzi zawierających p*

$|||\mu \in \tau|||(\mu, \tau)$ jest funkcją przynależności (μ do τ) wartościowaną w $\mathbb{B}$.

Definicja: wartościowanie w $\mathbb{R}$

Wartością pewności dla Φ nazywamy liczbę ($|p|$ ozn. długość ciągu p)

$$|\Phi| = \sum_{p \in \|\Phi\|} \frac{1}{2^{|p|}} \, .$$

Należenie warunkowe

Relacje dla metazbiorów definiuje się przez interpretacje i wymuszanie.

Definicja warunkowego (częściowego) należenia dla metazbiorów

Niech μ, τ będą metazbiorami, a $p \in \mathbb{T}$. Powiemy, że μ należy do τ *pod warunkiem* p (ozn. $\mu \in_p \tau$), jeśli $p \Vdash \mu \in \tau$.

Zatem, $\mu \in_p \tau$ gdy dla każdej gałęzi $\mathcal{C}$ zawierającej p zachodzi $\mu_{\mathcal{C}} \in \tau_{\mathcal{C}}$.

- Definiujemy nieskończenie wiele symboli relacji należenia $\{ \in_p : p \in \mathbb{T} \}$.
- Umożliwiają one wyrażanie różnych stopni należenia.
- Należenie warunkowe odzwierciedla fakt, że metazbiór μ może w pewnych okolicznościach (wyrażonych przez p) należeć do metazbioru τ, a w innych nie.
- Stopień należenia μ do τ, będący elementem algebry $\mathbb{B}$, jest zdeterminowany przez zbiór warunków $p \in \mathbb{T}$, które wymuszają $\mu \in \tau$, czyli zachodzi $\mu \in_p \tau$.

Przykład: stopień należenia metazbiorów

Jeśli $\mu \in_p \tau$ i $\mu \in_q \tau$, to stopień należenia μ do τ jest $\bar{p} \vee \bar{q} \in \mathbb{B}$.

Warunkowa równość, nienależenie i różność

Analogicznie definiujemy warunkową równość oraz negacje relacji.

Definicja warunkowej (częściowej) równości dla metazbiorów

μ jest *równy* τ *pod warunkiem* p ($\mu \approx_p \tau$), gdy $p \Vdash \mu = \tau$.

Należenie (równość) pod warunkiem $p = \mathbb{1}$ przypomina klasyczną, ostrą relację dla zwykłych zbiorów (całkowita prawda lub fałsz).

Negacje należenia i równości

- μ *nie należy do* τ *pod warunkiem* p ($\mu \not\in_p \tau$), gdy $p \Vdash \mu \notin \tau$,
- μ *jest różny* od τ *pod warunkiem* p ($\mu \not\approx_p \tau$), gdy $p \Vdash \mu \neq \tau$.

- Nienależenie nie jest zaprzeczeniem należenia
- różność nie jest zaprzeczeniem równości.

Przyczyna:

$$\neg\forall_C\ \mu_C \in \tau_C \quad \nRightarrow \quad \forall_C\ \mu_C \notin \tau_C$$

Operacje algebraiczne

- Dla metazbiorów pierwszego poziomu można zdefiniować operacje algebraiczne: sumę ($\mathbin{\smile\!\!\!\!\!\smile}$), różnicę ($\mathbin{\asymp}$) i część wspólną ($\mathbin{\frown\!\!\!\!\!\frown}$) .
- Definicje są łatwo i efektywnie implementowalne.
- Operacje są zgodne z częściowym należeniem i równością, np:[5]

$$\{\langle\varnothing, p\rangle\} \mathbin{\asymp} \{\langle\varnothing, p\cdot 0\rangle\} = \{\langle\varnothing, p\cdot 1\rangle\}$$

Twierdzenie

Operacje algebraiczne dla metazbiorów spełniają aksjomaty algebry Boole'a.

Przykład: prawo De Morgana

Niech α, β, δ będą metazbiorami pierwszego poziomu, oraz niech $\alpha \mathbin{\Subset} \delta$ i $\beta \mathbin{\Subset} \delta$. Zachodzi:

$$\delta \mathbin{\asymp} (\alpha \mathbin{\frown\!\!\!\!\!\frown} \beta) \quad \approx \quad (\delta \mathbin{\asymp} \alpha) \mathbin{\smile\!\!\!\!\!\smile} (\delta \mathbin{\asymp} \beta)\,.$$

[5] $p\cdot 0$ i $p\cdot 1$ oznaczają bezpośrednich potomków węzła p w drzewie $\mathbb{T}$

Moc metazbioru

Definicja mocy ogólna

Moc metazbioru τ to funkcja $\overline{\overline{\tau}}\colon 2^{\omega} \mapsto \mathrm{On}$ taka, że dla każdej gałęzi $\mathcal{C} \in 2^{\omega}$ zachodzi:

$$\overline{\overline{\tau}}\left(\mathcal{C}\right) = \left|\tau_{\mathcal{C}}\right| .$$

Moc metazbioru $\overline{\overline{\tau}}$ przyporządkowuje moce jego interpretacji $|\tau_{\mathcal{C}}|$ (będące liczbami porządkowymi) gałęziom $\mathbb{T}$.

Moc w zastosowaniach komputerowych

Moc skończonych metazbiorów pierwszego poziomu można przedstawić jako funkcję schodkową (kawałkami stałą) $\overline{\overline{\tau}}\colon [0,1) \mapsto \mathbb{N}$.

Dla takich metazbiorów można określić pojęcie równoliczności zgodne z mocą tak, że metazbiory równoliczne mają równą moc

Dziękuję za uwagę