Gdańsk, 6 czerwca 2020 r.

Tomasz Szarek
WFTiMS Politechniki Gdańskiej
oraz IM PAN oddział w Sopocie

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Tomasza Steifera pt. „Computable Prediction of Infinite Binary Sequences with Zero–One Loss"

W swojej rozprawie doktorskiej, napisanej pod opieką naukową dr. hab. Łukasza Dębowskiego, prof. IPI PAN, rolę promotora pomocniczego pełnił dr Dariusz Kalociński, mgr Tomasz Steifer bada pewne własności ciągów zerojedynkowych ujęte w zagadnieniach predykcji i teorii obliczalności. Na samym początku recenzji pragnę zauważyć, że moje kompetencje naukowe obejmują jedynie pewien zakres badanego zagadnienia; mam tu na myśli te fragmenty, w których stosowane są metody probabilistyczne. Dlatego zmuszony byłem włożyć duży wysiłek i wielką ilość czasu, żeby przeczytać ze zrozumieniem tę interesującą dysertację doktorską.

Praca doktorska składa się z trzech głównych części podzielonych na jedenaście rozdziałów i bibliografii. Została napisana w języku angielskim i zawiera wyniki badań autora, które zostały opublikowane w dwóch pracach naukowych: *An almost perfectly predictable process with no optimal predictor* oraz *On unstable and unoptimal prediction*. Pierwsza praca ukazała się w materiałach konferencyjnych z najważniejszego sympozjum IEEE Information Theory Society, druga w uznanym czasopiśmie z logiki matematycznej - Mathematical Logic Quaterly. Współautorem obydwu prac jest promotor pomocniczy rozprawy - dr Dariusz Kalociński.

Rozprawa doktorska została starannie zredagowana i ku mojemu wielkiemu zadowoleniu autor umiejscowił badane przez siebie zagadnienia w szerszym kontekście ogólnej teorii. Czytając rozprawę miałem chwilami wrażenie jakbym studiował dość zaawansowaną monografię przedmiotu. Choć mgr Steifer wyraźnie we wstępie zaznaczył co jest w prace nowe, a co dobrze znane, jednak momentami czułem się zagubiony nie mogąc odróżnić jednego od drugiego. W niektórych fragmentach prezentacja była dla mnie niedostatecznie klarowna; w szczególności ideę twierdzenia 6.7 mówiącego o tym, że dla każdej przeliczalnej rodziny funkcji selekcji istnieje przykład ciągu zerojedynkowego takiego, iż podciąg wybrany przez każdą funkcję selekcji (z tej rodziny) będzie zbalansowany, zrozumiałem dopiero po przestudiowaniu fragmentów monografii R.G. Downeya i D.R. Hirschfeldta *Algorithimc Randomness and Complexity. Theory and Applications of Computability*, Springer 2010.

W pracy mgr Steifera podoba mi się twierdzenie 105 i konstrukcja zbioru, który nie jest obliczalny, ale jest jest rekurencyjnie przeliczalny z niestabilnym błędem predykcji. Ciekawy jest rozdział szósty i zawarte w nim pojęcie optymalnej predykcji. Jak można się zorientować wyniki tego rozdziału pochodzą ze wspólnej pracy doktoranta i promotora pomocniczego. Korzystając z idei pochodzących od J. Ville dotyczących konstrukcji ciągu takiego, że każda selekcja wyznacza na nim zbalansowany podciąg, autorzy w sprytny sposób tak ją zmodyfikowali, iż rozważana selekcja stała się optymalna z ustalonym błędem $r \in (0, 1/2)$. Innym ciekawym wynikiem tej części pracy jest konstrukcja ciągu zerojedynkowego takiego, że błąd staje się funkcją rosnącą na ustalonym nieskończonym ciągu selekcji.

W kolejnym rozdziale wprowadzona została *predykcja Tadakiego*. Jest to naturalne uogólnienie klasycznej predykcji określonej na skończonych ciągach zerojedynkowych, która przyjmuje wartości w zbiorze $\{0, 1, \square\}$, przy czym wybór $\square$ oznacza zawieszenie predykcji. Autor formułuje twierdzenia ukazujące związki tej predykcji z wprowadzonymi wcześniej własnościami (Ko stochastycznością i stochastycznością według Churcha).

Ze względu na moje kwalifikacje naukowe największe zainteresowanie wzbudziła we mnie część trzecia rozprawy doktorskiej zatytułowana „Prediction in probabilistic framework". Z recenzenckiego obowiązku na samym początku zwrócę uwagę na pewną edytorską niezręczność; autor zamiast powtarzać definicje 70, 71 i 72 jeszcze w dwóch różnych kontekstach (jako definicje 137, 138, 139 oraz 140, 141 i 142), mógł sformułować je jeden raz, za to w dostatecznie zunifikowanym i ogólnym ujęciu. To jedynie drobna edytorska uwaga nie mająca większego wpływu na całościowy odbiór pracy mgr. Steifera.

Dużo poważniejszy zarzut chciałbym postawić w odniesieniu do twierdzenia 149, brakuje tu bowiem założenia mówiącego, że $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}|Y_n| < \infty$. Dodatkowo sam dowód tego twierdzenia nie jest kompletny. W rzeczy samej, *Crossing Lemma* (lemat 147) jest zasadniczym krokiem dowodowym twierdzenia Dooba o zbieżności martyngałów (podmartyngałów), jednak dla pełności brakuje jeszcze ostatniego elementu – z faktu, iż prawie każda trajektoria martyngału przechodzi przez pas między a i b, dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, jedynie skończenie wiele razy, wynika, że $\limsup_{n\to\infty} Y_n = \liminf_{n\to\infty} Y_n$, a więc istnieje granica $\lim_{n\to\infty} Y_n$. Nawiasem mówiąc w podrozdziale 2.5 niniejszej rozprawy doktorskiej błędnie przytoczone zostało samo twierdzenie Dooba o zbieżności martyngałów. Istotnie, także i tu brakuje założenia mówiącego o tym, że martyngał (ew. podmartyngał) jest $\mathbf{L}^1$ wspólnie ograniczony ($\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}|Y_n| < \infty$). Zresztą błędne są referencje do tego twierdzenia, jest to bowiem twierdzenie 35.4 w P. Billingsley, *Probability and Measures*, John Willey & Sons, 2008, a nie twierdzenie 35.5, jak podaje autor rozprawy. Oczywiście, założenie to w sposób naturalny jest spełnione, gdy rozważa się martyngał pochodzący od ustalonej zmiennej losowej Y i filtracji $\mathcal{F}_n$ postaci $Y_n = \mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_n]$. Wówczas rzeczywiście wystarcza zakładać $\mathbf{E}|Y| < \infty$.

W rozprawie podoba mi się twierdzenie 162, w którym mgr Steifer udowodnił ciekawy, choć intuicyjnie dość naturalny wynik mówiący o tym, że predykcja wybierająca 1 wtedy, gdy ten wybór jest bardziej prawdopodobny jest asymptotycznie optymalna dla dowolnego μ-losowego ciągu zerojedynkowego.

Muszę przyznać, że czytając rozprawę doktorską mgr. Steifera, a zwłaszcza te jej fragmenty, gdzie wprowadzone zostało pojęcie predykcji optymalnej, naturalne wydało mi się pytanie o miarę zbioru tych ciągów zerojedynkowych, dla których właśnie dana predykcja jest optymalna. Dokładnie na to pytanie odpowiada twierdzenie 168, wskazując na związki poruszanej kwestii z ergodycznością odpowiedniego procesu. W żadnym razie nie lansuję tutaj ani mojej przenikliwości, ani tym bardziej przesadnych kompetencji w dziedzinie, której poświęcona jest praca kandydata do stopnia doktora; wprost przeciwnie, chcę jedynie podkreślić, że mgr Steifer odpowiada na naturalne pytania, które samorzutnie rodzą się u czytelnika jego rozprawy.

Konkluzja: Podsumowanie mojej recenzji jest oczywiste. Pan Magister Tomasz Steifer przedstawił jako dysertację doktorską bardzo solidną rozprawę, w której zanalizował wiele własności predykcji, badając między innymi asymptotyczne zachowanie ich błędów, a także ich optymalność. Swoje wyniki umieścił w szerszym kontekście teorii obliczalności. Godna pochwały jest jego szeroka wiedza i naukowa dojrzałość. **Rozprawę oceniam bardzo pozytywnie, dlatego wnoszę o dopuszczenie Pana Tomasza Steifera do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

Tomasz Srarek